УДК 621.317

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

к.т.н. И.П. Захаров, М.П. Сергиенко
(представил д.т.н., проф. И.В. Руженцев)

Рассмотрен метод идентификации передаточных функций, основанный на дискретном преобразовании экспериментальной переходной характеристики с последующей обработкой методом наименьших квадратов. Приведена методика оценки характеристик систематической и случайной погрешности определения коэффициентов передаточной функции.

Введение. Методам идентификации динамических характеристик линейных систем автоматического управления посвящено большое количество работ [1 – 5]. Основными их недостатками является зависимость алгоритма реализации от модели передаточной функции, а также низкая помехозащищенность. Ниже рассмотрен метод определения коэффициентов передаточных функций в значительной степени свободный от указанных недостатков. Он основан на дискретном преобразовании Лапласа экспериментальной переходной характеристики (ПХ) $h(j\Delta t)$:

$$H(s) = s\Delta t \sum_{j=1}^{J} \exp(-js\Delta t)\, h(j\Delta t) \qquad (1)$$

с последующей обработкой результатов методом наименьших квадратов. В выражении (1) $H(s)$ – передаточная функция системы; s – оператор Лапласа; Δt – период дискретизации переходной характеристики.

В большинстве случаев передаточная функция может быть описана выражением

$$H(s) = \left(1 + \sum_{i=1}^{M} s^i a_{i+N}\right) \Bigg/ \left(1 + \sum_{i=1}^{N} s^i a_i\right), \quad N > M, \qquad (2)$$

где a_i – искомые коэффициенты. Выражение (2) может быть приведено к системе линейных уравнений с (N + M) неизвестными

$$\sum_{i=1}^{N} s_k^{i-1} a_i - \frac{1}{H(s_k)} \sum_{i=1}^{M} s_k^{i-1} a_{i+N} = \frac{1 - H(s_k)}{s_k H(s_k)}, \qquad (3)$$

где значения оператора Лапласа определяется в дискретных точках как sk = k∆s (∆s – период дискретизации оператора Лапласа).

Для повышения точности обработки результатов измерительного эксперимента на практике используют $k \gg (N+M)$ число уравнений, что делает систему (3) несовместной. Поэтому целесообразно применить к этой системе метод наименьших квадратов [6].

В этом случае сумма квадратов невязок будет минимальной, т.е.

$$Q=\sum_{k=1}^{K}\delta^2=\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{N}s_k^{i-1}a_i-\frac{1}{H(s_k)}\sum_{i=1}^{M}s_k^{i-1}a_{i+N}-\frac{1-H(s_k)}{s_kH(s_k)}\right)^2=\min,$$

в случае, когда частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i}=2\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{N}s_k^{i-1}a_i-\frac{1}{H(s_k)}\sum_{i=1}^{M}s_k^{i-1}a_{i+N}-\frac{1-H(s_k)}{s_kH(s_k)}\right)s_k^{i-1}=0,\ i=1\ldots N;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_{i+N}}=-2\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{N}s_k^{i-1}a_i-\frac{1}{H(s_k)}\sum_{i=1}^{M}s_k^{i-1}a_{i+N}-\frac{1-H(s_k)}{s_kH(s_k)}\right)\frac{s_k^{i-1}}{H(s_k)}=0,\ i=1\ldots M.$$

В результате преобразования полученной системы имеем нормальную систему уравнений с $(N+M)$ неизвестными

$$d\cdot a=y, \tag{4}$$

где
$$d=\begin{pmatrix}
J & [s] & \cdots & [s^{N-1}] & -\left[\frac{1}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^{M-1}}{H(s)}\right]\\
[s] & [s^2] & \cdots & [s^N] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^2}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^M}{H(s)}\right]\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
[s^{N-1}] & [s^N] & \cdots & [s^{2(N-1)}] & -\left[\frac{s^{N-1}}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^N}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^{N+M-2}}{H(s)}\right]\\
-\left[\frac{1}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^{N-1}}{H(s)}\right] & \left[\frac{1}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s}{H^2(s)}\right] & \cdots & \left[\frac{s^{M-1}}{H^2(s)}\right]\\
-\left[\frac{s}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^2}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^N}{H(s)}\right] & \left[\frac{s}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s^2}{H^2(s)}\right] & \cdots & \left[\frac{s^M}{H^2(s)}\right]\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\left[\frac{s^{M-1}}{H(s)}\right] & -\left[\frac{s^M}{H(s)}\right] & \cdots & -\left[\frac{s^{N+M-2}}{H(s)}\right] & \left[\frac{s^{M-1}}{H^2(s)}\right] & \left[\frac{s^M}{H^2(s)}\right] & \cdots & \left[\frac{s^{2(M-1)}}{H^2(s)}\right]
\end{pmatrix};$$

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ a_{N+1} \\ a_{N+2} \\ \dots \\ a_{N+M} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y=\begin{pmatrix} \left[(1-H(s))/(sH(s))\right] \\ \left[(1-H(s))/(H(s))\right] \\ \dots \\ \left[s^{N-2}(1-H(s))/H(s)\right] \\ -\left[(1-H(s))/\left(sH^2(s)\right)\right] \\ -\left[(1-H(s))/\left(H^2(s)\right)\right] \\ \dots \\ -\left[s^{M-2}(1-H(s))/H^2(s)\right] \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов, коэффициенты передаточной функции системы (4) и столбец ее свободных членов соответственно.

Квадратными скобками обозначены гауссовские суммы:

$$\left[s^q\right]=\sum_{k=1}^{K}s_k^q\,;\ \left[\frac{s^q}{H(s)}\right]=\sum_{k=1}^{K}\frac{s_k^q}{H(s_k)}\,;\ \left[\frac{s^q}{H^2(s)}\right]=\sum_{k=1}^{K}\frac{s_k^q}{H^2(s_k)}\,;$$

$$\left[s^q\,\frac{1-H(s)}{H(s)}\right]=\sum_{k=1}^{K}s_k^q\,\frac{1-H(s_k)}{H(s_k)}\,;\ \left[s^q\,\frac{1-H(s)}{H^2(s)}\right]=\sum_{k=1}^{K}s_k^q\,\frac{1-H(s_k)}{H^2(s_k)}\,.$$

Система (4) может быть решена различными методами, например, методом Крамера

$$a_i=D_i/D\,,$$

где D – главный определитель системы (4); D_i – определяется путем замены в главном определителе i-го столбца на столбец свободных членов.

Оценим погрешности предлагаемого метода. Общая погрешность метода содержит систематическую и случайную составляющие.

Систематическая погрешность определения коэффициентов передаточной функции зависит от следующих параметров:

1) количества j дискретных значений экспериментальной ПХ;

2) количества K уравнений в системе (4);

3) значения периода дискретизации Δs.

Относительная погрешность нахождения коэффициентов передаточной функции определяется выражением

$$\delta a_i=\frac{a_{i\,изм}-a_i}{a_i}100\%\,,$$

где $a_{iизм}$ – измеренное значение искомого коэффициента a_i.

Случайная составляющая погрешности определяется среднеквадратическим отклонением (СКО) коэффициентов передаточной функции

$$\sigma_{a_i} = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial a_i}{\partial H(s_k)}\right)^2 \sigma^2_{H(s_k)}}\,, \qquad (5)$$

где $\sigma_{H(s_k)}$ – СКО значений передаточной функции, определяемой как

$$\sigma_{H(s_k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\partial H(s_k)}{\partial h(j\Delta t)}\right)^2 \sigma^2_{h(j\Delta t)}}\,,$$

где $\sigma_{h(j\Delta t)}$ – СКО значений ПХ СИТ, которое определяется наличием аддитивных шумов в выходном сигнале системы и является одинаковым во всех J точках переходной характеристики.

Дифференцируя выражение (1) по $h(j\Delta t)$, получаем СКО значений передаточной функции в виде

$$\sigma_{H(s_k)} = s_k \Delta t \sqrt{\sum_{j=1}^{J} \exp(-2 j s_k \Delta t)}\, \sigma_{h(j\Delta t)}\,.$$

Рассмотрим реализацию данного метода на примере системы, описываемой апериодическим звеном с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\,.$$

Коэффициенты передаточной функции соответственно равны:

$$a_1 = \tau_1 + \tau_2\,; \quad a_2 = \tau_1 \tau_2\,.$$

Переходная характеристика такой системы имеет вид

$$h(t) = 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),$$

а система уравнений (4) – $\begin{pmatrix} J & [s] \\ [s] & [s^2] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(1 - H(s))/(sH(s))] \\ [(1 - H(s))/H(s)] \end{pmatrix}$.

Коэффициенты a_1 и a_2 рассчитываются методом Крамера, а постоянные времени можно найти как

$$\tau_{1,2} = \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)\Big/2\,.$$

Относительная погрешность нахождения постоянных времени определяется из выражения

$$\delta\tau_{1,2} = \frac{\tau_{1,2\,изм} - \tau_{1,2}}{\tau_{1,2}} 100\,\%\,.$$

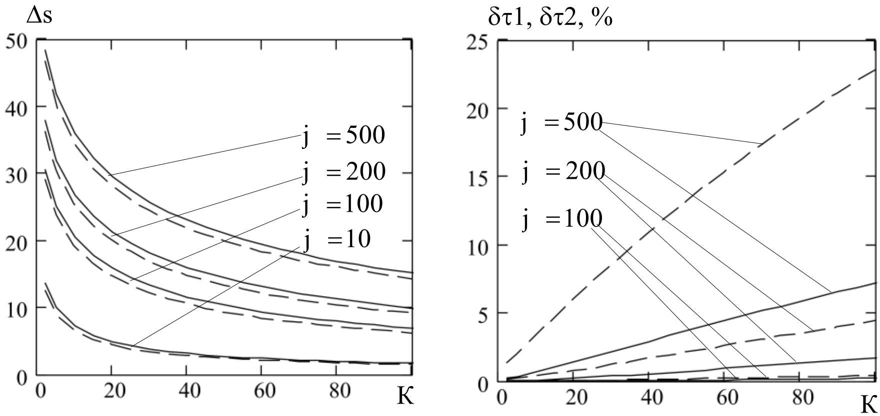
Для исследования систематической составляющей погрешности зададимся значениями постоянных времени: $\tau_1 = 0{,}012646$ с; $\tau_2 = 0{,}001134$ с.

На рис. 1, а показаны зависимости оптимальных значений периода дискретизации оператора Лапласа (при которых абсолютная погрешность определения постоянной времени равна нулю) при разном количестве дискретных точек ПХ и уравнений в системе (6). Оптимальные значения индивидуальны для каждой постоянной времени, и погрешности, возникающие при определении одной постоянной времени, когда погрешность другой равна нулю, показаны на рис.1, б. Сплошной линией показаны зависимости для τ_1, штрихпунктирной – для τ_2.

СКО коэффициентов передаточной функции рассчитываем по формуле (5). После выполнения необходимых преобразований, получаем:

$$\sigma_{a_1} = \frac{\Delta t\,\sigma_{h(j\Delta t)}}{D}\left(\left[\frac{\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right]\left[s^2\right]^2 - 2\left[\frac{s\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right]\left[s^2\right]\left[s\right] + \left[\frac{s^2\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right]\left[s\right]^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sigma_{a_2} = \frac{\Delta t\sigma_{h(j\Delta t)}}{D}\left(J^2\left[\frac{s^2\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right] - 2J\left[\frac{s\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right]\left[s\right] + \left[\frac{\sum_{j=1}^{J}\exp(-2js\Delta t)}{H^4(s)}\right]\left[s\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$



а б

Рис. 1. Зависимости оптимальных значений Δs для разного числа дискретных точек ПХ и уравнений (а); зависимости погрешностей определения τ_2 и τ_1, когда погрешности определения τ_1 и τ_2 равны нулю (б)

Зависимость СКО коэффициентов передаточной функции от СКО аддитивного шума в выходном сигнале системы линейна. Рассмотрим ее на примере системы с приведенными выше параметрами. Как было выявлено при исследовании систематической погрешности, в этом случае при количестве выборок ПХ $J = 100$ и количестве уравнений $K = 20$ оптимальное значение оператора Лапласа $\Delta s = 14{,}615$ (оно является оптимальным для τ_2, но поскольку погрешности определения τ_1 меньше (рис. 1, б), то выбираем его). Зависимости СКО коэффициентов передаточной функции от СКО аддитивного шума при указанных условиях имеют следующий вид:

$$\sigma_{a_1} = 2{,}174 \cdot 10^{-2} \sigma_{h(j\Delta t)}; \ \sigma_{a_2} = 2{,}146 \cdot 10^{-4} \sigma_{h(j\Delta t)}.$$

Выводы. Таким образом, предлагаемый метод определения коэффициентов передаточной функции позволяет устранить систематическую погрешность путем выбора оптимальных соотношений между количествами дискретных точек ПХ системы и уравнений при реализации метода наименьших квадратов, а также обладает удовлетворительной помехозащищенностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дехтяренко П.И., Коваленко В.П. Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования. – М.: Энергия, 1973. – 115 с.*
2. *Костенко Ю.Т. и др. Системы управления с динамическими моделями. – Х.: Основа, 1996. – 212 с.*
3. *Габисония В.Е. Теория и устройства систем автоматического управления. – Тбилиси: Мецниереба, 1988. – 228 с.*
4. *Марасанов В.В. Элементы теории систем / Под ред. Ю.А. Масленникова. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 173 с.*
5. *Эйкхофф П.И. др. Современные методы идентификации систем. – М.: Мир, 1985. – 400 с.*
6. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инжене-*

ров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 700 с.

Поступила 8.11.2004

***ЗАХАРОВ Игорь Петрович**, канд. техн. наук, доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 1978 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – измерительная идентификация.*

***СЕРГИЕНКО Марина Петровна**, аспирант кафедры метрологии измерительной техники Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 2002 году окончила ХНУРЭ. Область научных интересов – определение динамических характеристик линейных средств измерений.*